

Capitolo Sesto

INFINITI E INFINITESIMI

§ 1. ORDINI DI INFINITO

DEFINIZIONE. Sia data una funzione $f: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $\alpha (\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\})$ di accumulazione per E . Diremo che f è *infinita per x che tende ad α* , o, brevemente, *in α* , se è

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \infty \text{ (o, eventualmente, } +\infty \text{ o } -\infty).$$

In questo caso, diremo anche che f è *un infinito per x che tende ad α* .

ESEMPIO. 1) Sono infinite le funzioni:

$$x^n, \text{ per } x \rightarrow \infty, \quad e^x, \text{ per } x \rightarrow +\infty, \quad \operatorname{tg} x, \text{ per } x \rightarrow \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{1}{x-2}, \text{ per } x \rightarrow 2, \quad \log x, \text{ per } x \rightarrow +\infty \text{ e per } x \rightarrow 0^+.$$

Consideriamo le funzioni (di \mathbb{R} in \mathbb{R}) $x, 2x, x(2 + \sin x), e^x$. Tutte queste funzioni sono infinite per $x \rightarrow +\infty$, ma tendono tutte a infinito con la stessa *rapidità*? Per poter rispondere alla domanda, abbiamo bisogno di un criterio per misurare questa 'rapidità'. Dobbiamo cioè decidere quand'è che due funzioni tendono all'infinito con la stessa velocità e quando una funzione tende a infinito più rapidamente di un'altra. Le scelte possibili sono, a priori diverse. Qui adottiamo una delle possibili scelte che, pur non essendo la più generale possibile, è più che sufficiente ai nostri scopi.

DEFINIZIONE. Siano $f, g: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ due infiniti per $x \rightarrow \alpha (\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\})$. Diremo che f è *equivalente* a g , e scriveremo $f \sim g$, se è

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$
¹

OSSERVAZIONE. Si ha dunque, in particolare, $f \sim g$ se è $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ma non è vero il viceversa. Può cioè succedere che risulti $f \sim g$ senza che esista il $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$, come appare dal seguente

ESEMPIO. 2) Siano $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(n) = 2n$ e $g(n) = (-1)^n n$. Si ha: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|f(n)|}{|g(n)|} = 2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, da cui $f \sim g$, pur non esistendo il $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$.

¹ Una definizione più generale è la seguente: Due funzioni f, g , infinite per $x \rightarrow \alpha$ sono equivalenti se esiste un intorno di α dove, per ogni $x \neq \alpha$ è $f(x) = g(x) \phi(x)$, con ϕ funzione limitata e discosta da zero..

TEOREMA 1. *Quella sopra definita è una relazione di equivalenza nell'insieme delle funzioni infinite per $x \rightarrow \alpha$.*

DIM. Essendo $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{|f(x)|}{|f(x)|} = 1$, si ha $f \sim f$. Da $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si ottiene $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{|g(x)|}{|f(x)|} = \frac{1}{l} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; dunque, da $f \sim g$ segue $g \sim f$. In fine, da $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = l$ e $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{|g(x)|}{|h(x)|} = m$, con $l, m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si ottiene $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{|f(x)|}{|h(x)|} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \frac{|g(x)|}{|h(x)|} = lm \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; dunque, da $f \sim g$ e $g \sim h$ segue $f \sim h$. ■

DEFINIZIONE. Le classi dell'equivalenza ora definita prendono il nome di *ordini di infinito*. La classe di equivalenza alla quale appartiene la funzione f si indica con $\text{Ord}_\alpha f$ o, semplicemente, $\text{Ord} f$ se non ci possono essere equivoci riguardo al punto α . È dunque, per definizione,

$$\text{Ord}_\alpha f = \text{Ord}_\alpha g \text{ se e solo se } f \sim g.$$

ESEMPIO. 3) Si ha: $\text{Ord}_{+\infty} x^2 = \text{Ord}_{+\infty} (2x^2 - 3x + 1)$.

E anche:

$$\text{Ord}_{\pi/2} \text{tg} x = \text{Ord}_{\pi/2} f(x), \text{ con } f(x) = \frac{1}{\pi/2 - x};$$

infatti, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\text{tg} x}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\left[\frac{\pi}{2} - x\right] \sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = 1.$$

DEFINIZIONE. Siano $f, g: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ due infiniti per $x \rightarrow \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$). Diremo che f è *strettamente equivalente* a g e scriveremo $f \approx g$, se è

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

È di immediata verifica il

TEOREMA 2. *Quella ora definita è una relazione di equivalenza nell'insieme delle funzioni infinite per $x \rightarrow \alpha$. Inoltre da $f \approx g$ segue $f \sim g$, mentre non sussiste l'implicazione opposta. ■*

Ciò si esprime dicendo che l'equivalenza " \approx " è *strettamente più fine* dell'equivalenza " \sim ".

ESEMPLI. 4) Riesaminando le funzioni dell'Esempio 3, si vede che, per $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $\text{tg} x$ è strettamente equivalente a $\frac{1}{\pi/2 - x}$, mentre, per $x \rightarrow \infty$, x^2 non è strettamente equivalente a $2x^2 - 3x + 1$.

5) Posto $f(x) = x$ e $g(x) = [x]$, si ha $f \approx g$. Lo si ricava immediatamente osservando che è

$$1 \geq \frac{[x]}{x} \geq \frac{x-1}{x} \rightarrow 1.$$

Confronto fra gli ordini di infinito

DEFINIZIONE. Siano $f, g: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ due infiniti per $x \rightarrow \alpha$ ($\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$). Diremo che è $\text{Ord}_\alpha f > \text{Ord}_\alpha g$ se è

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty, \text{ o, ciò che è lo stesso, se è } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = +\infty.$$

TEOREMA 3. La definizione appena data è coerente, ossia: da $f \sim f_1$, $g \sim g_1$, $\text{Ord}_\alpha f > \text{Ord}_\alpha g$ segue $\text{Ord}_\alpha f_1 > \text{Ord}_\alpha g_1$.

DIM. Per ipotesi, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{|f(x)|}{|f_1(x)|} = l; \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{|g(x)|}{|g_1(x)|} = m, \quad \text{con } l, m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = +\infty.$$

Si ottiene:
$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{|f_1(x)|}{|g_1(x)|} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{|f_1(x)|}{|f(x)|} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \frac{|g(x)|}{|g_1(x)|} = +\infty,$$

dato che $\frac{|f_1(x)|}{|f(x)|} \rightarrow \frac{1}{l} \neq 0$. ■

TEOREMA 4. Quella appena definita è una relazione d'ordine fra gli ordini di infinito (sempre con $x \rightarrow \alpha$). ■

Ciò significa che non è mai $\text{Ord}_\alpha f > \text{Ord}_\alpha f$ (proprietà *antiriflessiva*), che se è $\text{Ord}_\alpha f > \text{Ord}_\alpha g$, non può essere $\text{Ord}_\alpha g > \text{Ord}_\alpha f$ (proprietà *antisimmetrica* in forma forte) e, in fine, che da $\text{Ord}_\alpha f > \text{Ord}_\alpha g$ e $\text{Ord}_\alpha g > \text{Ord}_\alpha h$ segue $\text{Ord}_\alpha f > \text{Ord}_\alpha h$ (proprietà *transitiva*). La verifica è immediata.

ESEMPIO. 6) Per $x \rightarrow +\infty$, si ha: $\text{Ord } x^3 > \text{Ord } x^2 > \text{Ord } x$.

$$\text{Ord } e^x > \text{Ord } x^r > \text{Ord } \log x, \quad \text{per ogni } r \in \mathbb{R}^+.$$

Inoltre,
$$\text{Ord}_{0+} \log x < \text{Ord}_{0+} \frac{1}{x^r}, \quad \text{per ogni } r \in \mathbb{R}^+.$$

OSSERVAZIONE. L'ordinamento così stabilito nell'insieme degli ordini di infinito non è totale. Esistono cioè elementi *inconfrontabili*.

ESEMPLI. 7) Le funzioni $f(x) = x + x^2 \sin^2 x$ e $g(x) = x$ sono entrambi infinite per $x \rightarrow +\infty$. Ma, non esistendo il $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}$, non può essere né $\text{Ord } f = \text{Ord } g$, né $\text{Ord } f > \text{Ord } g$, né $\text{Ord } g > \text{Ord } f$. Per verificare che, effettivamente, il limite non esiste, basta osservare che, per gli x del tipo $k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, è $\frac{f(x)}{g(x)} = 1$, mentre per gli x del tipo $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, è $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x + x^2}{x}$ che tende a $+\infty$.

8) Sono del pari inconfrontabili gli ordini di infinito, sempre per $x \rightarrow +\infty$, delle funzioni x e $x(2 + \sin x)$.

§ 2. ORDINI DI INFINITESIMO

DEFINIZIONE. Sia data una funzione $f: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $\alpha (\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\})$ di accumulazione per E . Diremo che f è *infinitesima per x che tende a α* , o, brevemente, *in α* , se è

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = 0.$$

In questo caso, diremo anche che f è *un infinitesimo per x che tende ad α* .

ESEMPIO. 1) Sono infinitesime le funzioni:

$$x^n, \text{ per } x \rightarrow 0, \quad e^x, \text{ per } x \rightarrow -\infty, \quad \operatorname{tg} x, \text{ per } x \rightarrow \pi,$$

$$\frac{1}{x-2}, \text{ per } x \rightarrow \infty, \quad \log x, \text{ per } x \rightarrow 1.$$

Per semplicità, ci limiteremo al caso di funzioni che tendono a 0 al tendere di x a $\alpha (\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\})$ e che non si annullano in *tutto un intorno* di α (salvo, eventualmente, nel punto stesso se è $\alpha \in \mathbb{R}$).

DEFINIZIONE. Siano $f, g: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, due infinitesimi per $x \rightarrow \alpha (\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\})$. Diremo che f è *equivalente a g* , e scriveremo $f \sim g$, se è

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

OSSERVAZIONE. Si ha dunque, in particolare, $f \sim g$ se è $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ma non è vero il viceversa. Può cioè succedere che risulti $f \sim g$ senza che esista il $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$, come appare dal seguente

ESEMPIO. 2) Siano $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(n) = \frac{2}{n}$ e $g(n) = \frac{(-1)^n}{n}$. Si ha: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|f(n)|}{|g(n)|} = 2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, da cui $f \sim g$, pur *non esistendo* il $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$.

Ragionando come nel caso degli infiniti, si prova subito il

TEOREMA 5. *Quella sopra definita è una relazione di equivalenza nell'insieme delle funzioni infinitesime per $x \rightarrow \alpha$.* ■

DEFINIZIONE. Le classi dell'equivalenza ora definita prendono il nome di *ordini di infinitesimo*. La classe di equivalenza alla quale appartiene la funzione f si indica con $\operatorname{ord}_\alpha f$ o, semplicemente, $\operatorname{ord} f$ se non ci possono essere equivoci riguardo al punto α . È dunque, per definizione,

² Anche in questo caso, una definizione più generale è la seguente: Due funzioni f, g , infinitesime per $x \rightarrow \alpha$ sono equivalenti se esiste un intorno di α dove, per ogni $x \neq \alpha$ è $f(x) = g(x) \varphi(x)$, con φ funzione limitata e discosta da zero..

$$\text{ord}_\alpha f = \text{ord}_\alpha g \text{ se e solo se } f \sim g.$$

ESEMPIO. 3) Si ha: $\text{ord}_0 x = \text{Ord}_0 (2x + 3 \sin x) = \text{ord}_0 \text{tg } x$:

$$\text{ord}_0 (1 - \cos x) = \text{ord}_0 x^2, \text{ essendo } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2};$$

$$\text{ord}_0 (e^x - 1) = \text{ord}_0 x = \text{ord}_0 \log(x + 1);$$

$$\text{ord}_0 (x - \sin x) = \text{ord}_0 x^3, \text{ dato che } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

DEFINIZIONE. Siano $f, g: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ due infinitesimi per $x \rightarrow \alpha$ ($\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$). Diremo che f è *strettamente equivalente* a g , e scriveremo $f \approx g$, se è

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

TEOREMA 6. *Quella ora definita è una relazione di equivalenza nell'insieme delle funzioni infinitesime per $x \rightarrow \alpha$. Inoltre da $f \approx g$ segue $f \sim g$, mentre non sussiste l'implicazione opposta. ■*

Ciò si esprime dicendo che l'equivalenza " \approx " è *strettamente più fine* dell'equivalenza " \sim ".

ESEMPIO. 4) Riesaminando le funzioni dell'Esempio 3, si vede che, per $x \rightarrow 0$, è

$$x \approx \sin x \approx \text{tg } x \approx e^x - 1 \approx \log(x + 1);$$

$$1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2}; \quad x - \sin x \approx \frac{x^3}{6}.$$

Confronto fra gli ordini di infinitesimo

DEFINIZIONE. Siano $f, g: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ due infinitesimi per $x \rightarrow \alpha$ ($\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$). Diremo che è $\text{ord}_\alpha f > \text{ord}_\alpha g$ se è

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Procedendo come nel caso degli infiniti, si provano i seguenti Teoremi:

TEOREMA 7. *La definizione appena data è coerente, ossia: da $f \sim f_1$, $g \sim g_1$, $\text{ord}_\alpha f > \text{ord}_\alpha g$ segue $\text{ord}_\alpha f_1 > \text{ord}_\alpha g_1$. ■*

TEOREMA 8. *Quella appena definita è una relazione d'ordine fra gli ordini di infinitesimo (sempre con $x \rightarrow \alpha$). ■*

ESEMPIO. 5) Si ha: $\text{ord}_0 x^3 > \text{ord}_0 x^2 > \text{ord}_0 x$.

$$\text{ord}_{-\infty} e^x > \text{ord}_{-\infty} \frac{1}{x^n}, \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}^+.$$

OSSERVAZIONE. L'ordinamento così stabilito nell'insieme degli ordini di infinitesimo

non è totale. Esistono cioè elementi *inconfrontabili*.

ESEMPIO. 6) Le funzioni $f(x) = x + x \sin^2(1/x)$ e $g(x) = x$ sono entrambi infinitesime per $x \rightarrow 0$. Ma, non esistendo il $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}$, non può essere né $\text{ord} f = \text{ord} g$, né $\text{ord} f > \text{ord} g$, né $\text{ord} g > \text{ord} f$. Per accertare che, in effetti, il limite non esiste, basta osservare che, per gli x del tipo $\frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, è $\frac{f(x)}{g(x)} = 1$, mentre per gli x per cui è $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, è $\frac{f(x)}{g(x)} = 2$.

§ 3. ORDINI DI INFINITO O DI INFINITESIMO E OPERAZIONI FRA FUNZIONI

Dai Teoremi sul limite del prodotto e delle funzioni composte, segue subito il seguente

TEOREMA 9. Siano $f, f_1, g, g_1: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ infinite per $x \rightarrow \alpha$ ($\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$).

- 1) Se è $f \sim f_1$ e $g \sim g_1$, allora è anche $fg \sim f_1g_1$.
- 2) Se f, f_1 sono positive in un intorno di α e se è $f \sim f_1$, allora, per ogni numero reale positivo k è anche $f^k \sim f_1^k$.
- 3) Si ha $\text{Ord}_\alpha fg > \text{Ord}_\alpha f$.
- 4) Le funzioni $\frac{1}{f}$ e $\frac{1}{g}$ sono infinitesime per $x \rightarrow \alpha$ e si ha $\text{Ord}_\alpha f = \text{Ord}_\alpha g$ se e solo se è $\text{ord}_\alpha \frac{1}{f} = \text{ord}_\alpha \frac{1}{g}$ e $\text{Ord}_\alpha f > \text{Ord}_\alpha g$ se e solo se è $\text{ord}_\alpha \frac{1}{f} > \text{ord}_\alpha \frac{1}{g}$. ■

Le Proposizioni (1) e (2) si esprimono dicendo che la relazione di equivalenza è *compatibile* con il prodotto di funzioni e l'elevamento a potenza.

Dal Teorema sul limite della somma, segue poi subito il seguente

TEOREMA 10. Siano $f, g: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ infinite per $x \rightarrow \alpha$ ($\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$).

- 1) Se è $\text{Ord}_\alpha f > \text{Ord}_\alpha g$, allora anche $f + g$ è infinita per $x \rightarrow \alpha$ e si ha $\text{Ord}_\alpha(f + g) = \text{Ord}_\alpha f$; si ha anzi: $f + g \approx f$. La stessa tesi sussiste anche se la funzione g è limitata.
- 2) Se è $\text{Ord}_\alpha f = \text{Ord}_\alpha g$ e se anche $f + g$ è infinita per $x \rightarrow \alpha$, si ha $\text{Ord}_\alpha(f + g) \leq \text{Ord}_\alpha f$, valendo il segno " $<$ " se e solo se f è strettamente equivalente a $-g$. ■

Principio di sostituzione degli infiniti

TEOREMA 11. Siano $f, f_1, g, g_1: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ infinite per $x \rightarrow \alpha$ ($\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$); con $f \approx f_1$ e $g \approx g_1$; allora, se esiste il $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, esiste ed è uguale a l anche il $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$.

DIM. Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f_1(x)}{f(x)} \frac{f(x)}{g(x)} \frac{g(x)}{g_1(x)} = 1 \times l \times 1 = l. \blacksquare$$

ESEMPIO. 1) Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x - 1}{2x^3 + x \operatorname{arctg} x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}.$$

Passiamo agli infinitesimi. Dai Teoremi sui limiti del prodotto e delle funzioni composte, segue subito il seguente

TEOREMA 12. Siano $f, f_1, g, g_1: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ infinitesime per $x \rightarrow \alpha$ ($\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$).

- 1) Se $f \sim f_1$ e $g \sim g_1$, allora è anche $fg \sim f_1g_1$.
- 2) Siano f, f_1 positive in un intorno di α ; se $f \sim f_1$, allora, per ogni numero reale positivo k è anche $f^k \sim f_1^k$.
- 3) Si ha $\operatorname{ord}_\alpha fg > \operatorname{ord}_\alpha f$.
- 4) Le funzioni $\frac{1}{f}$ e $\frac{1}{g}$ sono infinite per $x \rightarrow \alpha$ (dato che, per ipotesi, f e g non si annullano in tutto un intorno di α). Si ha $\operatorname{ord}_\alpha f = \operatorname{ord}_\alpha g$ se e solo se è $\operatorname{Ord}_\alpha \frac{1}{f} = \operatorname{Ord}_\alpha \frac{1}{g}$ e $\operatorname{ord}_\alpha f > \operatorname{ord}_\alpha g$ se e solo se è $\operatorname{Ord}_\alpha \frac{1}{f} > \operatorname{Ord}_\alpha \frac{1}{g}$. ■

Le Proposizioni (1) e (2) si esprimono dicendo che la relazione di equivalenza è *compatibile* con il prodotto di funzioni e con l'elevamento a potenza.

Dal Teorema sul limite della somma, segue poi subito il seguente

TEOREMA 13. Siano $f, g: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ infinitesime per $x \rightarrow \alpha$ ($\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$).

- 1) Se $\operatorname{ord}_\alpha f < \operatorname{ord}_\alpha g$, allora anche $f + g$ non si annulla in tutto un intorno di α e si ha $\operatorname{ord}_\alpha (f + g) = \operatorname{ord}_\alpha f$; si ha anzi: $f + g \approx f$.
- 2) Se $\operatorname{ord}_\alpha f = \operatorname{ord}_\alpha g$ e se anche $f + g$ non si annulla in tutto un intorno di α , si ha $\operatorname{ord}_\alpha (f + g) \geq \operatorname{ord}_\alpha f$, valendo il segno " $>$ " se e solo se f è strettamente equivalente a $-g$. ■

Principio di sostituzione degli infinitesimi

In modo analogo a quanto fatto per gli infiniti, si prova il

TEOREMA 14. Siano $f, f_1, g, g_1: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ infinitesime per $x \rightarrow \alpha$ ($\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$); con $f \approx f_1$ e $g \approx g_1$; allora, se esiste $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, esiste ed è uguale a l anche il $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$. ■

ESEMPLI. 2) Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 3x^3 + 2(1 - \cos x)}{3\sin x + x \operatorname{arctg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3\sin x} = \frac{1}{3}.$$

3) Ricordando che $x - \sin x \approx \frac{x^3}{6}$ e $1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2}$, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x(1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x}(x^x - \sin x - 1)}{x(1 - \cos x)} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

§ 4. ORDINI D'INFINITO O D'INFINITESIMO REALI, SOPRAREALI, SOTTOREALI, INFRAREALI

Sappiamo che l'insieme degli ordini di infinito per $x \rightarrow \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$) è solo parzialmente ordinato. Vogliamo ora occuparci di un suo sottoinsieme totalmente ordinato e contenente le funzioni elementari.

Siccome la funzione identica è infinita per $x \rightarrow \infty$, è naturale cominciare con il caso $\alpha = +\infty$.

Sappiamo che l'equivalenza fra infiniti è compatibile con il prodotto e con l'innalzamento a potenza. Perciò, assunto

$$\text{Ord}_{+\infty} x = 1,$$

è naturale assumere anche

$$\text{Ord}_{+\infty} x^k = k, \quad \forall k > 0.$$

Ora si ha $\text{Ord}_{+\infty} x^h x^k = \text{Ord}_{+\infty} x^{h+k} = h+k$

e $\text{Ord}_{+\infty} (x^h)^k = \text{Ord}_{+\infty} x^{hk} = hk.$

Generalizzando questo fatto, si accetta la seguente

DEFINIZIONE. Detti $f, g: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ due infiniti per $x \rightarrow +\infty$, si assume

$$\text{Ord}_{+\infty} fg = \text{Ord}_{+\infty} f + \text{Ord}_{+\infty} g$$

e, se f è positiva in un intorno di $+\infty$,

$$\text{Ord}_{+\infty} f^k = k \text{ Ord}_{+\infty} f.$$

Se f è infinita per x che tende a $-\infty$, si assume

$$\text{Ord}_{-\infty} f(x) = \text{Ord}_{+\infty} f(-x).$$

Passiamo agli infiniti per x che tende ad $x_0 \in \mathbb{R}$ (in particolare $x_0 = 0$). Dal Teorema sul limite delle funzioni composte si ottiene subito il

TEOREMA 15. Se $f, g: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ sono due infiniti equivalenti per $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$, allora sono equivalenti, per $x \rightarrow \infty$, gli infiniti $f(x_0 + \frac{1}{x})$ e $g(x_0 + \frac{1}{x})$. ■

È dunque naturale accettare la seguente

DEFINIZIONE. Se $f: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ è infinita per $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$, si pone:

$$\text{Ord}_{x_0} f(x) = \text{Ord}_{\infty} f(x_0 + \frac{1}{x}).$$

È dunque, in particolare:

$$\text{Ord}_{x_0} \frac{1}{|x - x_0|^k} = \text{Ord}_{+\infty} \frac{1}{|x_0 + 1/t - x_0|^k} = \text{Ord}_{+\infty} t^k = k,$$

da cui

$$\text{Ord}_0 \frac{1}{|x|^k} = k.$$

Sappiamo che è $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty, \forall n \in \mathbb{N}^+$; è dunque

$$\text{Ord}_{+\infty} e^x > \text{Ord}_{+\infty} x^n (= n), \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

DEFINIZIONE. Sia $f: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ infinita per $x \rightarrow \alpha$ ($\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$). Se, per ogni numero reale $k > 0$, è $\text{Ord}_\alpha f > k$, si dice che l'ordine di infinito di f per $x \rightarrow \alpha$ è *soprareale*. Se, per ogni numero reale $k > 0$, è $\text{Ord}_\alpha f < k$, si dice che l'ordine di infinito di f per $x \rightarrow \alpha$ è *sottoreale*. Se esiste numero reale $k > 0$ tale che $k < \text{Ord}_\alpha f < k + \varepsilon$, per ogni $\varepsilon > 0$, si dice che l'ordine di infinito di f per $x \rightarrow \alpha$ è *infrareale*.

ESEMPIO. 1) Sia $a > 1$; allora $\text{Ord}_{+\infty} a^x$ è soprareale e $\text{Ord}_{+\infty} \log_a x$ è sottoreale, mentre è infrareale $\text{Ord}_{+\infty} x \log_a x$, dato che, $\forall \varepsilon > 0$ è

$$1 = \text{Ord}_{+\infty} x < \text{Ord}_{+\infty} x \log_a x < \text{Ord}_{+\infty} x^{1+\varepsilon} = 1 + \varepsilon.$$

Osserviamo ancora che non c'è un unico ordine di infinito soprareale né un unico ordine di infinito sottoreale. Si ha, infatti:

$$\text{Ord}_{+\infty} e^x < \text{Ord}_{+\infty} e^{2x} < \text{Ord}_{+\infty} e^{3x} < \dots;$$

$$\text{Ord}_{+\infty} \log x > \text{Ord}_{+\infty} \log \log_a x > \text{Ord}_{+\infty} \log \log \log_a x > \dots$$

Ne viene, fra l'altro, che non esiste né un ordine di infinito massimo, né uno minimo.

Passiamo agli infinitesimi.

Anche l'insieme degli ordini di infinitesimo per $x \rightarrow \alpha$ ($\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$) è solo parzialmente ordinato. Come già fatto per gli infiniti, vogliamo occuparci di un suo sottoinsieme totalmente ordinato e contenente le funzioni elementari.

Siccome la funzione identica è infinitesima per $x \rightarrow 0$, è naturale cominciare con il caso $\alpha = 0$.

Sappiamo che l'equivalenza fra infinitesimi è compatibile con il prodotto e con l'innalzamento a potenza. Perciò, assunto

$$\text{ord}_0 x = 1,$$

è naturale assumere anche

$$\text{ord}_0 |x|^k = k, \quad \forall k > 0.$$

Ragioni analoghe a quelle viste per gli infiniti, ci portano ad accettare la

DEFINIZIONE. Detti $f, g: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ due infinitesimi per $x \rightarrow 0$, si assume

$$\text{ord}_0 fg = \text{ord}_0 f + \text{ord}_0 g$$

e, se f è positiva in un intorno di 0,

$$\text{ord}_0 f^k = k \text{ord}_0 f, \quad \forall k > 0.$$

Si ammette poi che, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, sia

$$\text{ord}_{x_0} |x - x_0|^k = k, \quad \text{per ogni } k > 0.$$

Passiamo agli infinitesimi per x che tende a $+\infty$ (a $-\infty$). Dal Teorema sul limite delle funzioni composte si ottiene subito il

TEOREMA 16. Se $f, g: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ sono due infinitesimi equivalenti per $x \rightarrow +\infty$ [per $x \rightarrow -\infty$], allora sono equivalenti, per $x \rightarrow 0$, gli infinitesimi

$$f\left(\frac{1}{|x|}\right) \text{ e } g\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad \left[f\left(\frac{-1}{|x|}\right) \text{ e } g\left(\frac{-1}{|x|}\right) \right]. \blacksquare$$

È dunque naturale accettare la seguente

DEFINIZIONE. Se $f: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ è infinitesima per $x \rightarrow +\infty$ [per $x \rightarrow -\infty$], si pone:

$$\text{ord}_{+\infty} f(x) = \text{ord}_0 f\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad \left[\text{ord}_{-\infty} f(x) = \text{ord}_0 f\left(\frac{-1}{|x|}\right) \right].$$

È dunque, in particolare:

$$\text{ord}_{\infty} \frac{1}{|x|^k} = \text{ord}_0 |x|^k = k.$$

Analogamente a quanto fatto per gli infiniti, si dà la nozione di ordini di infinitesimo soprareale, sottoreale e infrareale.

DEFINIZIONE. Sia $f: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ infinitesima per $x \rightarrow \alpha$ ($\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$). Se, per ogni numero reale $k > 0$ è $\text{ord}_{\alpha} f > k$, si dice che l'ordine di infinitesimo di f per $x \rightarrow \alpha$ è soprareale. Se, per ogni numero reale $k > 0$ è $\text{ord}_{\alpha} f < k$, si dice che l'ordine di infinitesimo di f per $x \rightarrow \alpha$ è sottoreale. Se esiste un numero reale $k > 0$ tale che $k < \text{ord}_{\alpha} f < k + \varepsilon$, per ogni $\varepsilon > 0$, si dice che l'ordine di infinitesimo di f per $x \rightarrow \alpha$ è infrareale.

ESEMPIO. 2) Tenendo conto dei limiti notevoli, si ottiene che $\text{ord}_{-\infty} e^x$ è soprareale, $\text{ord}_0 \frac{1}{\log x}$ è sottoreale, $\text{ord}_0 x \log x$ è infrareale.

Si ha, inoltre:

$$\begin{aligned} \text{ord}_0 x &= \text{ord}_0 \sin x = \text{ord}_0 \arctg x = \text{ord}_0 (e^x - 1) = \text{ord}_0 \log(1 + x) = 1; \\ \text{ord}_0 (1 - \cos x) &= 2; \quad \text{ord}_0 (x - \sin x) = 3. \end{aligned}$$

Legami fra ordini di infinito e ordini di infinitesimo

Dalle definizioni sopra adottate segue subito il

TEOREMA 17. Sia $f: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ un infinito [un infinitesimo] per $x \rightarrow \alpha$ ($\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$). Si ha

$$\text{Ord}_{\alpha} f(x) = \text{ord}_{\alpha} \frac{1}{f(x)} \quad \left[\text{ord}_{\alpha} f(x) = \text{Ord}_{\alpha} \frac{1}{f(x)} \right]. \blacksquare$$

Nella pratica è comoda la seguente

DEFINIZIONE. Gli ordini di infinito [di infinitesimo] si assumono come ordini di infinitesimo [di infinito] *negativi*. Le funzioni limitate e discoste da 0 si assumono come infinite e infinitesime di ordine 0.

ESEMPIO. 3) Si ha:

$$\text{Ord}_{+\infty} \frac{x \sqrt{2x} \operatorname{arctg} x}{x^2 + 1} = 1 + \frac{1}{2} + 0 - 2 = -\frac{1}{2};$$

dunque, la nostra funzione è infinitesima di ordine $\frac{1}{2}$.

§ 5. ESERCIZI

1) Determinare gli ordini di infinito, per $x \rightarrow +\infty$ delle seguenti funzioni:

$$\sqrt[3]{x^2}; \quad \frac{x^5 + x^2 - 1}{x^2 - 3x}; \quad (1 + 2x) \sqrt{x}; \quad \frac{1 + 2x}{\sqrt[3]{x^2}}; \quad \frac{x^2}{\log(1 + x)}; \quad x^2 \operatorname{arctg} x + x \sin x;$$

$$\frac{x^2(1 + \sin^2 x)}{x + \log x}; \quad \frac{x^2 + x(1 + \sin x)}{\sqrt{x + 1}}; \quad x^3(x + 1)^5 - x^8; \quad \frac{x^2 \sqrt{2 + \sin x}}{(x + 1) \operatorname{arctg} x};$$

$$x \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x - 1}} + \sqrt{x^3 + 2} - x; \quad \sqrt{x^2 \sqrt{\frac{x^3 + \sin x}{x^3 - \sin x}} + (x^2 - 1) \operatorname{arctg} x + x \sqrt{x}}.$$

2) Determinare gli ordini di infinitesimo, per $x \rightarrow 0$ delle seguenti funzioni:

$$\arcsin^3 x; \quad \sqrt{\operatorname{tg} x}; \quad x^2(e^x - 1); \quad x^3 - 5x^2; \quad \sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x; \quad \sin^4 x \cos^3 x;$$

$$x + \sin x; \quad 1 - e^{2x}; \quad \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{\sin x}}; \quad \frac{x^2(\operatorname{arctg} x + x)}{\sqrt{1 - \cos x}}; \quad \frac{\log(1 + \sin x)}{\sqrt{|\sin x|}}.$$

3) Disporre in ordine crescente gli ordini di infinito per $x \rightarrow +\infty$ delle seguenti funzioni:

$$x; \quad x \log x; \quad \frac{x}{\log x}; \quad x \log^2 x; \quad \frac{x \log x}{\log \log x};$$

$$x \log x (\log \log x)^2; \quad \frac{x \log x (\log \log x)^3}{\log x}; \quad x \log(x \log x).$$

4) Si provi che, se $f(x)$ è una funzione che tende a $+\infty$ [a $-\infty$] per $x \rightarrow \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$) e se $\text{Ord} f$ non è sottoreale, allora $e^{f(x)}$ è un infinito di ordine soprareale [un infinitesimo di ordine soprareale]. Si provi, mediante esempi, che se $\text{Ord} f$ è sottoreale, allora la funzione $e^{f(x)}$ può avere ordine di infinito [di infinitesimo] sottoreale, reale, soprareale.

[Caso $f \rightarrow +\infty$, con $\alpha = +\infty$. Essendo $\text{Ord} f$ non sottoreale, esiste un numero positivo k per

cui è $\text{Ord} f > k$. È dunque $\frac{f(x)}{x^k} \rightarrow +\infty$. Esiste perciò un intorno di $+\infty$ in cui si ha $f(x) > x^k$. Per ogni numero naturale n si ha dunque

$$\frac{ef(x)}{x^n} = \frac{ef(x)}{e^{x^k}} \frac{e^{x^k}}{x^n} = e^{f(x) - x^k} \frac{e^{x^k}}{(x^k)^{n/k}} \rightarrow +\infty.$$

Controesempi, sempre con $f \rightarrow +\infty$ e $\alpha = +\infty$. Siano $f_1(x) = \log^2 x$, $f_2(x) = \log x$, $f_3(x) = \log \log x$. Tutte tre queste funzioni sono degli infiniti di ordine sottoreale, ma $\exp f_1$ è di ordine soprareale, $\exp f_2$ è di ordine 1 e, in fine, $\exp f_3$ è di ordine sottoreale. Per verificare che, effettivamente, $\exp f_1$ è di ordine soprareale, basta osservare che è

$$\frac{\exp f_1(x)}{x^n} = \exp(\log^2 x - n \log x) \rightarrow +\infty.]$$

5) Si provi che, se $f(x)$ è una funzione che tende a $+\infty$ per $x \rightarrow \alpha$ ($\in \mathbb{R} \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$) e se $\text{Ord} f$ non è soprareale, allora $\log f(x)$ è un infinito di ordine sottoreale. Si provi, mediante esempi, che se $\text{Ord} f$ è soprareale, allora la funzione $\log f(x)$ può avere ordine di infinito sottoreale, reale, soprareale.

[Caso $f \rightarrow +\infty$, con $\alpha = +\infty$. Essendo $\text{Ord} f$ non soprareale, esiste un numero positivo k per cui è $\text{Ord} f < k$. È dunque $\frac{f(x)}{x^k} \rightarrow 0$. Esiste perciò un intorno di $+\infty$ in cui si ha $f(x) < x^k$ e, di conseguenza, anche $\log f(x) < \log x^k$. Per ogni numero reale h si ha dunque

$$\frac{\log f(x)}{x^h} = \frac{\log f(x)}{\log x^k} \frac{\log x^k}{x^h} < k \frac{\log x}{x^h} \rightarrow 0.$$

Controesempi, sempre con $\alpha = +\infty$. Siano $f_1(x) = \exp(\exp x)$, $f_2(x) = e^x$, $f_3(x) = \exp(\log^2 x)$. Tutte tre queste funzioni sono degli infiniti di ordine soprareale, ma $\log f_1$ è di ordine soprareale, $\log f_2$ è di ordine 1 e, in fine, $\log f_3$ è di ordine sottoreale.]